12.1 偏导数与全微分

2024年4月16日 星期二 10:24

一、可微性与全微分的定义

定义：设 $D \subset \mathbb{R}^2$，$z=f(x,y)$ 是定义在D上的二元函数 $(x_0,y_0)\in D^\circ$，若存在实数 A，B，

使得 (1) $f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0) = A\Delta x + B\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$ $\quad (\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$

则称 f 在点 (x_0,y_0) 是可微的，并称 $A\Delta x + B\Delta y$ 为 f 在点 (x_0,y_0) 处的全微分

记作 $df(x_0,y_0) = A\Delta x + B\Delta y$

也写作 $dz(x_0,y_0) = A\Delta x + B\Delta y$

注：若 f 在点 (x_0,y_0) 处可微，则 f 在点 (x_0,y_0) 处连续

(1) 式的含义：$\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \dfrac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)-A\Delta x - B\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = 0$

二、偏导数与偏导数的定义

定义：设 $D\subset\mathbb{R}^2$，$z=f(x,y)$ 是定义在D上的二元函数，$(x_0,y_0)\in D^\circ$

若极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$ 存在，则称函数 f 在点 (x_0,y_0)

处关于 x 可求偏导，并称此极限为 f 在点 (x_0,y_0) 处关于 x 的偏导数

记作 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$，$f_x(x_0,y_0)$ $\quad D_1f(x_0,y_0)$ 或 $\dfrac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)$ $\quad z_x(x_0,y_0)$

同样地，可定义

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) := \lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}$$

定义：设 $D\subset\mathbb{R}^2$ 为开集，若定义在D上的二元函数 f 对于D中的

每个点 (x,y) 都关于 x 可求偏导，则可定义函数

$$D \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,y) \longrightarrow f_x(x,y)$$

称此函数为 f 在D上关于 x 的偏导数（简称为偏导数）

记作 $f_x(x,y)$ 或 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$

若 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，则 $\exists\, A, B\in\mathbb{R}$，使 (1) 式成立

在(1)式中，令 $\Delta y=0$，可得 $f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+o(|\Delta x|)$

从而 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=A$

于是 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=A$，同理 $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=B$

可微必要条件：

若 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微，则 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ 与 $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ 都存在

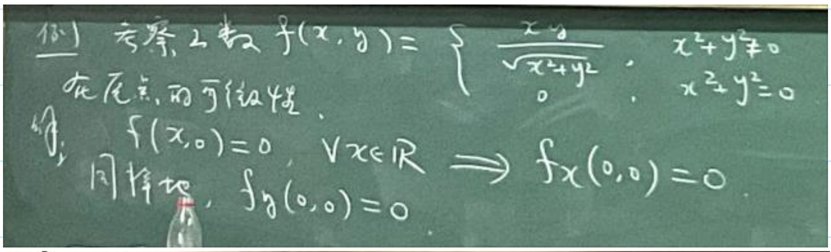
且分别等于(1)式中的A与B，此时有 $df(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y$ (2)

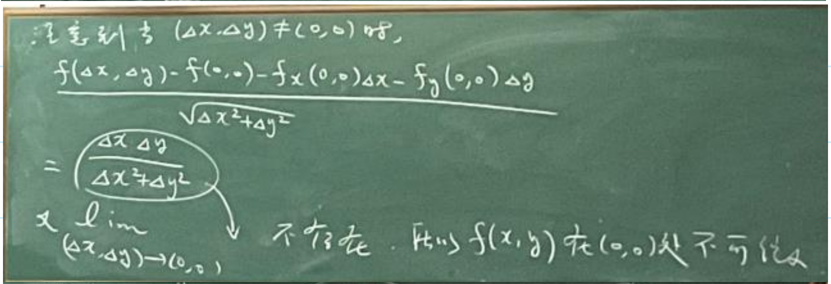
在(2)中，令 $f(x,y)=x$ 则 $f_x(x,y)=1$ $f_y(x,y)=0$，从而 $dx=\Delta x$，类似地 $dy=\Delta y$

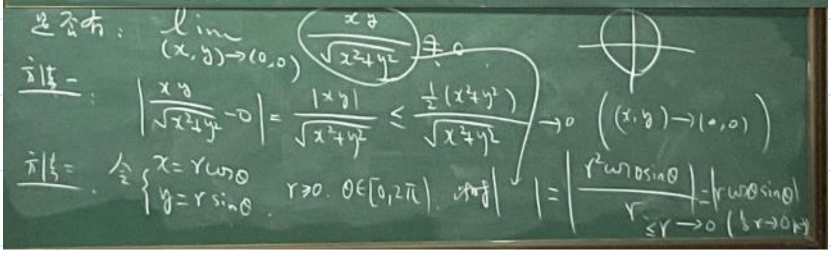
于是(2)式可改写为 $df(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)\,dx+f_y(x_0,y_0)\,dy$

注：$f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微

$$\Longleftrightarrow \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)-f_x(x_0,y_0)\Delta x-f_y(x_0,y_0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=0$$







可微充分条件：

先设 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内存在偏导数 $f_x(x,y)$ 及 $f_y(x,y)$

且均在 (x_0,y_0) 处连续 (则称 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续可微)

(1)式(左边) $=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)+f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$

(L-中值定理) $= f_x(x_0+\theta_1\Delta x,\ y_0+\Delta y)\cdot\Delta x + f_y(x_0,\ y_0+\theta_2\Delta y)\cdot\Delta y$

(偏导数连续) $= f_x(x_0,y_0)\cdot\Delta x + o(1)\cdot\Delta x + f_y(x_0,y_0)\cdot\Delta y + o(1)\Delta y$

(其中 $o(1)$ 当 $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$ 为无穷小量)

从而上式 $= f_x(x_0,y_0)\cdot\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$ 当 $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$

于是 f 在 (x_0,y_0) 处可微

(a) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微

(b) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续

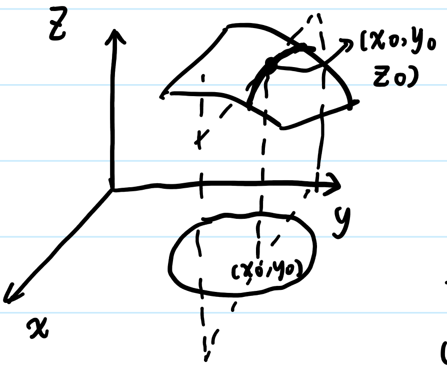
(c) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处存在 $f_x(x_0,y_0)$、$f_y(x_0,y_0)$

$a\Rightarrow b, c$　　$b+c \not\Rightarrow a$　　$c\not\Rightarrow b$　　$b\not\Rightarrow c$

三. 偏导数的几何意义

$z=f(x,y)$，$(x,y)\in D$ 可以看作曲面 Γ 的方程表示

取 $(x_0,y_0)\in D$，令 $z_0=f(x_0,y_0)$



用平面 $y=y_0$ 截曲面 Γ，得到曲线 l

l 的参数表示：$\begin{cases} x=x \\ y=y_0 \\ z=f(x,y_0) \end{cases}$

从而有 $f_x(x_0,y_0)$ 就是在平面 $y=y_0$ 中，曲线 l 在点 (x_0,y_0,z_0) 处的切线的斜率

l 在 (x_0,y_0,z_0) 处的切线为 $x-x_0=\dfrac{y-y_0}{0}=\dfrac{z-z_0}{f_x(x_0,y_0)}$

切向量 $\vec{\tau}=(1,0,f_x(x_0,y_0))$

其方向余弦满足

$$\cos(\vec{\tau},\vec{x}):\cos(\vec{\tau},\vec{y}):\cos(\vec{\tau},\vec{z})=1:0:f_x(x_0,y_0)$$

四. 方向导数

定义：设 $D\subset\mathbb{R}^2$　$f: D\to\mathbb{R}$

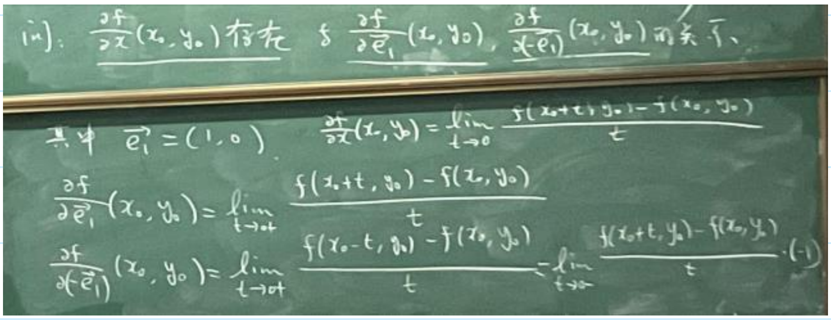
$P_0(x_0,y_0)\in D^\circ$，$\vec{v}\in\mathbb{R}^2$ 为单位向量

则 f 在 (x_0,y_0) 处沿单位向量 $\vec{v}$ 的方向导数为

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(P_0+t\cdot\vec{v})-f(P_0)}{t}$$

若上述极限存在，记作 $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0,y_0)$ 或 $f_{\vec{v}}(x_0,y_0)$

（若有 $z=f(x,y)$，则也可写作 $\frac{\partial z}{\partial \vec{v}}(x_0,y_0)$，$z_{\vec{v}}(x_0,y_0)$）



性质：$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处关于 x 可求偏导，

$\Longleftrightarrow$ $\frac{\partial f}{\partial \vec{e_1}}(x_0,y_0)$ 与 $\frac{\partial f}{\partial(-\vec{e_1})}(x_0,y_0)$ 都存在且互为相反数

并且此时 $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial(\vec{e_1})}(x_0,y_0)$

设 f 在点 $(x_0,y_0)\in D^\circ$ 处可微，是否一定有 $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0,y_0)$ 存在？ √

可微 $\Rightarrow$ $f(x_0+tv_1,y_0+tv_2)-f(x_0,y_0)$

$=f_x(x_0,y_0)\cdot tv_1+f_y(x_0,y_0)\cdot tv_2+o(t)$

$$\Rightarrow \frac{f(x_0+tv_1,y_0+tv_2)-f(x_0,y_0)}{t}=f_x(x_0,y_0)v_1+f_y(x_0,y_0)v_2+\frac{o(t)}{t}$$

$\to f_x(x_0,y_0)v_1+f_y(x_0,y_0)v_2 \quad (t\to 0^+)$

定理：设 f 在点 $(x_0,y_0)\in D^\circ$ 处可微，$\vec{v}=(v_1,v_2)$ 为单位向量，一定有

$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)\cdot v_1+f_y(x_0,y_0)\cdot v_2$

$=(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0))\cdot\vec{v}=\mathrm{grad}\,f(x_0,y_0)\cdot\vec{v}$

$=|\mathrm{grad}\,f(x_0,y_0)||\vec{v}|\cdot\cos\theta$

其中 θ 为 $\mathrm{grad}\,f(x_0,y_0)$ 与 $\vec{v}$ 的夹角

定义：设二元函数 f 在点 (x_0,y_0) 处关于 x 与 y 的两个偏导数都存在，则称向量 $(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0))$ 为 f 在该点处的梯度，记作 $\mathrm{grad}\,f(x_0,y_0)$ 或 $\nabla f(x_0,y_0)$

※ 所有的方向导数均存在 $\not\Rightarrow$ 在点 (x_0,y_0) 可微

五. 向量值函数的可微性

设 $f: D\subset R^n \longrightarrow R^m$ $\quad \vec{x}^0 \in D^\circ$

若存在从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的线性映射 A，使得

$f(\vec{x}^0+\Delta\vec{x}) - f(\vec{x}^0) = A\Delta\vec{x} + o(\Delta\vec{x})$，当 $\Delta\vec{x}\to 0$ 时

其中 $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{|o(\Delta\vec{x})|}{|\Delta\vec{x}|} = 0$

则称 f 在点 $\vec{x}^0$ 可微，把 $A\Delta\vec{x}$ 称作 f 在点 $\vec{x}^0$ 处的微分，记作 $df(\vec{x}^0)$

设 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的标准正交基

$\{u_1,\cdots,u_m\}$ 为 $\mathbb{R}^m$ 中的标准正交基

设 f 在点 $\vec{x}^0$ 处可微，其分量函数为 $f_1,\cdots f_m$

即 $f(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}),\cdots,f_m(\vec{x}))$

则 $1\le i\le m$，$1\le j\le n$，都有 $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0)$ 存在

并且 $f'(x^0)\cdot e_j = \sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0)\, u_i$，$\quad 1\le j\le n$

$\forall\, 1\le j\le n$ $\quad$ 求 $f'(x^0)\cdot e_j = ?$

可微 $\Leftrightarrow \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{|f(x^0+te_j) - f(x^0) - f'(x^0)(te_j)|}{|te_j|} = 0$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{|f(x^0+te_j) - f(x^0) - f'(x^0)(te_j)|}{|t|} = 0$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{t\to 0} \left| \dfrac{f(x^0+te_j) - f(x^0) - t f'(x^0)\cdot e_j}{t} \right| = 0$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(x^0+te_j) - f(x^0) - t f'(x^0)\cdot e_j}{t} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(x^0+te_j) - f(x^0)}{t} = f'(x^0)\cdot e_j$

$\lim\limits_{t\to 0} \left(\dfrac{f_1(x^0+te_j) - f(x^0)}{t}, \cdots, \dfrac{f_m(x^0+te_j) - f(x^0)}{t} \right) = f'(x^0)\cdot e_j$

于是 $\forall 1\le i\le m$ $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f_i(x^0+te_j)-f_i(x^0)}{t}$ 都存在

即 $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0)$ 存在

$$f'(x_0)e_j=\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x^0),\cdots,\frac{\partial f_m}{\partial x_j}(x^0)\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0)\cdot u_i$$

于是 $f'(x^0)\cdot\begin{pmatrix}h_1\\ \vdots\\ h_m\end{pmatrix}=f'(x^0)\cdot\left(\sum\limits_{j=1}^{n}h_je_j\right)$

$$=\sum_{j=1}^{n}h_j\left(f'(x^0)\cdot e_j\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{n}h_j\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0)\cdot u_i\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}h_j\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0)\right)\cdot u_i$$

$$=\left(\sum_{j=1}^{n}h_j\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x^0),\cdots,\sum_{j=1}^{n}h_j\frac{\partial f_m}{\partial x_j}(x^0)\right)^T$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x^0)\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x^0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x^0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\ \vdots\\ h_m\end{pmatrix}$$

$$\triangleq J_f(x^0)\begin{pmatrix}h_1\\ \vdots\\ h_m\end{pmatrix}$$

f在x^0处的Jacob矩阵

$$df(x^0)=J_f(x^0)\cdot\overrightarrow{\Delta x}$$

设 $D_g, D_f \subset \mathbb{R}^2$

$g: D_g \to \mathbb{R}^2$ $\qquad f: D_f \to \mathbb{R}^2$

$(u,v) \to (x(u,v), y(u,v))$ $\qquad (x,y) \to z(x,y)$

若 $g(D_g) \subset D_f$，则可定义函数 $D_g \to \mathbb{R}^2$

$(u,v) \to f(g(u,v))$

设 $(u_0,v_0) \in D_g^\circ$

$x_0 = x(u_0,v_0)$ $\quad y_0 = y(u_0,v_0)$ $\quad$ [即 $(x_0,y_0) = g(u_0,v_0)$]

若 $x(u,v), y(u,v)$ 都在 (x_0,y_0) 处可求偏导

$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微 (2) 不可减弱为"f可求偏导"

则 $f\circ g$ 在点 (u_0,v_0) 处可求偏导，令 $z = f(g(u,v))$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$$

证: (2) ⇒ $f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$ 这步就运用到了可微

$$= f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + \alpha(\Delta x,\Delta y)\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

其中 $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \alpha(\Delta x,\Delta y) = 0$ (当 $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$) (3)

对于给定的 Δu，令

$\Delta x = x(u_0+\Delta u, v_0) - x(u_0,v_0)$

$\Delta y = y(u_0+\Delta u, v_0) - x(u_0,v_0)$

则 $\frac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0) = \lim\limits_{\Delta u\to 0}\frac{z(u_0+\Delta u,v_0) - z(u_0,v_0)}{\Delta u}$

$$= \lim_{\Delta u\to 0}\frac{f(x(u_0+\Delta u,v_0), y(u_0+\Delta u,v_0)) - f(x(u_0,v_0), y(u_0,v_0))}{\Delta u}$$

$$= \lim_{\Delta u\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)}{\Delta u}$$

$$\overset{(3)}{=} \lim_{\Delta u\to 0}\Big[f_x(x_0,y_0)\cdot\underbrace{\frac{\Delta x}{\Delta u}}_{\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)} + f_y(x_0,y_0)\underbrace{\frac{\Delta y}{\Delta u}}_{\frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0)} + \alpha(\Delta x,\Delta y)\cdot\frac{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\Delta u}\Big]$$

当 $\Delta u\to 0$ 时，有 $\Delta x\to 0$ 且 $\Delta y\to 0$，从而 $\alpha(\Delta x,\Delta y)\to 0$

且 $\frac{\Delta x}{\Delta u}\to\frac{\partial x}{\partial u}(x_0,y_0)$，$\frac{\Delta y}{\Delta u}\to\frac{\partial y}{\partial u}(x_0,y_0)$

从而 $\frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\Delta u} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta u}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\right)^2}\cdot\frac{|\Delta u|}{\Delta u}$ 是一个有界量

$\Rightarrow \alpha(\Delta x,\Delta y)\cdot\frac{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\Delta u} \to 0$ (当 $\Delta u\to 0$)

一般情况下的链式法则

设 $g: D_g\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ $\quad f: D_f\subset\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^m$ $\quad g(D_g)\subset D_f$

设 g 在点 $x^0\in D_g^\circ$ 处可微，f 在点 $y^0 = g(x^0)\in D_f^\circ$ 处可微

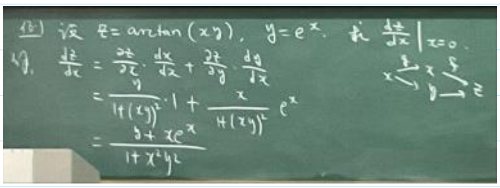
则 $z = f\circ g(x)$ 在点 x^0 处可微 并有 $(f\circ g)'(x) = f'(g(x^0))\cdot g'(x_0)$

即在标准正交基下 $J_{f\circ g}(x^0) = J_f(x^0)\cdot J_g(x^0)$ ↓ 矩阵乘法

或等价的 $\frac{\partial z_i}{\partial x_j}(x^0) = \sum\limits_{l=1}^{k}\frac{\partial z_i}{\partial y_l}(y^0)\frac{\partial y_l}{\partial x_j}(x^0)$ $\quad 1\le i\le m \quad 1\le j\le n$

注: 若 D_f、D_g 都是开区域，并且 f, g 分别在 D_f D_g 上连续可微

则 $f\circ g$ 也在 D_g 上连续可微



一阶微分的形式不变性

$z = z(x,y)$

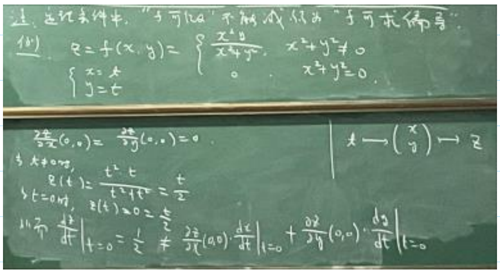
① x, y 作为自变量，有 $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$

x,y为因变量 ② $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v)\end{cases}$ 此时 $dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv$

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right)du + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right)dv$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\cdot du + \frac{\partial y}{\partial v}\cdot dv\right)$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot dv$$



$f: D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ $\quad (x_0,y_0)\in D^\circ$

设 $f_x(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 内的某一邻域内存在

定义: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f_x(x_0+\Delta x,y_0) - f_x(x_0,y_0)}{\Delta x}$

如果该极限存在，并称它为 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处关于 x 求两次偏导的二阶偏导数，也记作 $f_{xx}(x_0,y_0)$，简略的 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$

类似地，$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ 也记作 f_{yx}

定义: 在高阶偏导数中，既有关于 x 的偏导，又有关于 y 的偏导 称作混合偏导数

定理: 如果 $f_{xy}(x,y)$ 与 $f_{yx}(x,y)$ 都在点 (x_0,y_0) 处连续，则

$f_{xy}(x_0,y_0) = f_{yx}(x_0,y_0)$

证: 对于充分小的 Δx 与 Δy，并且 $\Delta x\ne 0$，$\Delta y\ne 0$，

令 $I(\Delta x,\Delta y) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0+\Delta x, y_0) + f(x_0,y_0)$

则 $I(\Delta x,\Delta y) = (f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y)) - (f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0))$

定义: $\varphi(y) = f(x_0+\Delta x, y) - f(x_0,y)$ $\quad (\Rightarrow \varphi'(y) = f_y(x_0+\Delta x, y) - f_y(x_0,y))$

则 $I(\Delta x,\Delta y) = \varphi(y_0+\Delta y) - \varphi(y_0)$

$\overset{\text{L-中值}}{=} \varphi'(y_0+\theta_1\Delta y)\cdot\Delta y$ $\quad (\theta_1\in(0,1))$

$= (f_y(x_0+\Delta x, y_0+\theta_1\Delta y) - f_y(x_0, y_0+\theta_1\Delta y))\Delta y$

令 $g(x) = f_y(x, y_0+\theta_1\Delta y)$ 有

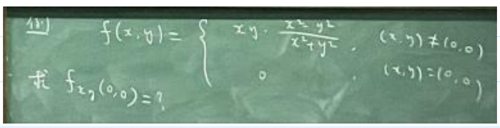
$g'(x) = f_{yx}(x, y_0+\theta_1\Delta y)$

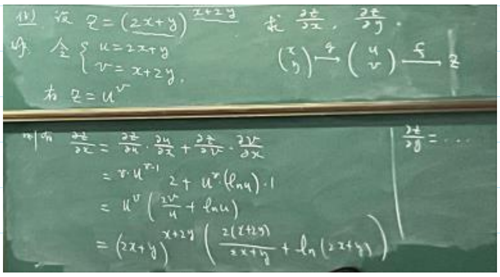
从而 $I(\Delta x,\Delta y) = g'(x+\theta_2\Delta x)\cdot\Delta x\cdot\Delta y = f_{yx}(x_0+\theta_2\Delta x, y_0+\theta_1\Delta y)\Delta x\,\Delta y$

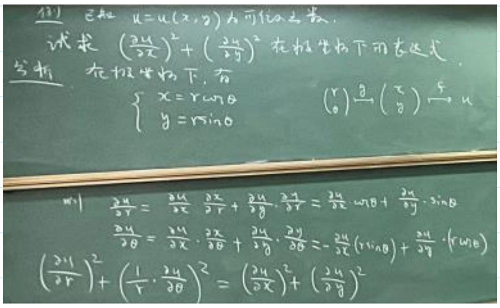
另一方面 $I(\Delta x,\Delta y) = f_{xy}(x_0+\theta_3\Delta x, y_0+\theta_4\Delta y)\Delta x\,\Delta y$ $\quad (\theta_3,\theta_4\in(0,1))$

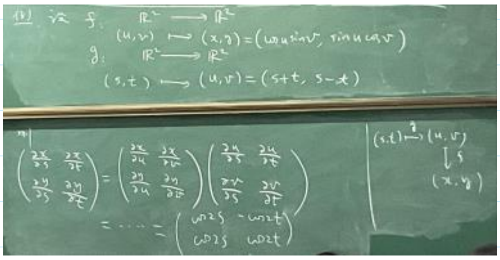
$\Rightarrow f_{xy}(x_0+\theta_3\Delta x, y_0+\theta_4\Delta y) = f_{yx}(x_0+\theta_2\Delta x, y_0+\theta_1\Delta y)$

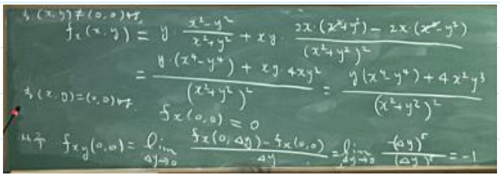
令 $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$ 可得结论











先对x求偏导

再对y求偏导

12.3 中值定理和Taylor公式

2024年4月23日 星期二　10:40

定义：设 $D\subset\mathbb{R}^2$ 是区域，若 $\forall \vec{x}_0,\vec{x}_1\in D$ 及 $\forall\lambda\in(0,1)$，有 $\lambda\vec{x}_0+(1-\lambda)\vec{x}_1\in D$

则称 D 是一个凸区域

设 $D\subset\mathbb{R}^2$ 是一个凸区域，$f: D\to\mathbb{R}$ 在 D 上可微

则 $\forall(x_0,y_0)$，$(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\in D$

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=f_x(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\Delta x+f_y(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\Delta y$$

$g(t)=f(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y)$，$t\in(0,1)$

则 g 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导

从而 $g(1)-g(0)=g'(\theta)\cdot 1$ （其中 $\theta\in(0,1)$）

注意到 $g'(t)=f_x(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y)\cdot\Delta x+f_y(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y)\Delta y$

定理：设二元函数 f 在区域 D 上的两个偏导数 f_x 与 f_y 恒等于 0

则 f 在 D 上为常值函数

证：任取 (x_0,y_0) $(x_1,y_1)\in D$，可以用有限条首尾相接的线段连接它们

下说明 若线段 PQ 含于 D，则 $f(P)=f(Q)$ (*) [由中值定理]

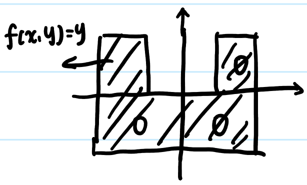
从而 $f(x_0,y_0)=f(x_1,y_1)$

例：设 $f:[a,b]\times[c,d]\longrightarrow\mathbb{R}$ 连续

(1) 若在 D° 内，有 $f_x\equiv0$，则 $f(x,y)$ 为仅与 y 相关的函数

(2) 若在 D° 内，有 $f_x=f_y\equiv0$ 则 $f(x,y)$ 在 D 上为常值函数

(3) 对于一般区域 (1) 不成立



泰勒公式

设二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域 $U=O((x_0,y_0),r)$ 内具有 $(n+1)$ 阶 的连

续偏导数，则 $\forall (x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\in U$，有

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)=\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{m!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x_0,y_0)+\frac{1}{(n+1)!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)$$

其中 $\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x,y)=\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\frac{\partial^m}{\partial x^i\partial y^{m-i}}f(x,y)\Delta x^i\Delta y^{m-i}$

分析　令 $\varphi(t)=f(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)$，$t\in[0,1]$

断言：φ 在 $[0,1]$ 上具有 $(n+1)$ 阶连续导数

由 f_x 及 f_y 在 U 内连续，可知 f 在 U 内可微

特别地，$\forall t\in[0,1]$，$f(x,y)$ 在 $(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)$ 处可微

转化为一元函数，然后用一元函数的泰勒展开去做.

从而由复合函数可微性，$\varphi(t)$ 在 t 处可微，且

$\varphi'(t)=f_x(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)\Delta x+f_y(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)\cdot\Delta y$

$\qquad\triangleq\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)$

并且 $\varphi'(t)$ 在 $[0,1]$ 上连续.

由 $(f_x)_x$，$(f_x)_y$，$(f_y)_x$，$(f_y)_y$ 在 U 内连续，从而 f_x 及 f_y 在 U 内可微

特别地，$\forall t\in[0,1]$，f_x 与 f_y 在 $(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)$ 可微

从而 $\varphi'(t)$ 在 t 处可微

$\varphi''(t)=\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)$

一般地 $\forall 1\le m\le n+1$

$\varphi^{m}(t)=\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)$

并且 $\varphi^{m}(t)$ 在 $[0,1]$ 上连续

从而 $\varphi(1)=\sum_{m=0}^{n}\frac{\varphi^{m}(0)}{m!}+\frac{\varphi^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}$

此时 $\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x+\theta\Delta x, y+\theta\Delta y)=\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^i\partial y^{n+1-i}}f(x+\theta\Delta x, y+\theta\Delta y)\Delta x^i\Delta y^{n+1-i}$

$\forall 0\le i\le n+1$　　　$|(*)|_i$

$\left|\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^i\partial y^{n+1-i}}f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta x^i\Delta y^{n+1-i}-\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^i\partial y^{n+1-i}}f(x_0,y_0)\Delta x^i\Delta y^{n+1-i}\right|$

$=\left|\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^i\partial y^{n+1-i}}f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)-\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^i\partial y^{n+1-i}}f(x_0,y_0)\right|\left|\Delta x^i\Delta y^{n+1-i}\right|$

$\le|\qquad\qquad|\rho^{n+1}$　　$(\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$

于是 上式 $=o(\rho^{n+1})$　$(\rho\to 0)$

$\Rightarrow\left|\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}(*)_i\right|=o(\rho^{n+1})$

$\Rightarrow$ (三角不等式) $\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)$

$\qquad=\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0,y_0)+o(\rho^{n+1})$

推论：设二元函数 f 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有直到 n 阶的连续偏导数，则

推论：设二元函数 f 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内有直到 n 阶的连续偏导数，则

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x_0, y_0) + o(\rho^n) \qquad (\rho \to 0)$$

带 Peano 余项的 Taylor 公式

12.4 隐函数

2024年4月25日 星期四 14:25

定义：设 $F: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

设 I, J 是 $\mathbb{R}$ 中的区间且 $I \times J \subset D$

若 $\forall x \in I$，$\exists! y \in J$，使 $F(x,y)=0$ (2)

则称由方程 (2) 确定了一个以 I 为定义域，以 J 的值域的隐函数

定理1：（隐函数定理的存在性与连续性）

设 $F: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$，其中 D 是开集 设 F 在 D 上连续，F_y 在 D 上连续，

$\exists (x_0, y_0) \in D$ 使 $F(x_0,y_0)=0$ $F_y(x_0,y_0) \neq 0$

则 $\exists \alpha, \beta > 0$，使 $(x_0-\alpha, x_0+\alpha) \times (y_0-\beta, y_0+\beta) \subset D$ 且

(1) $\forall x \in (x_0-\alpha, x_0+\alpha)$，$\exists! y \in (y_0-\beta, y_0+\beta)$，使 $F(x,y)=0$

若 $y=f(x)$，则有 $F(x,f(x))=0$，特别地 $F(x_0,y_0)=0$

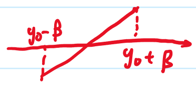
(2) 上述确定的 $y=f(x)$ 在 $(x_0-\alpha, x_0+\alpha)$ 上是连续的

(1) 的证明：

对 $\forall x \in (x_0-\alpha, x_0+\alpha)$

不妨设 $F_y(x_0,y_0)>0$

均有



$\Rightarrow \exists \beta>0$ 使 $[x_0-\beta, x_0+\beta] \times [y_0-\beta, y_0+\beta] \subset D$ 且 F_y 在

$[x_0-\beta, x_0+\beta] \times [y_0-\beta, y_0+\beta]$ 上恒大于 0

从而 $\forall$ 固定 x，$F(x,y)$ 关于 y 严格单增，从而 $F(x_0,y_0-\beta)<0$ $F(x_0,y_0+\beta)>0$

由函数 F 在 $(x_0,y_0-\beta)$ 及 $(x_0,y_0+\beta)$ 处连续，所以 $\exists \alpha \in (0,\beta)$ 使

$\forall x (x_0-\alpha, x_0+\alpha)$，有 $F(x,y_0-\beta)<0$ 且 $F(x,y_0+\beta)>0$，于是由一元连续函数

的零点存在定理，$\exists y \in (y_0-\beta, y_0+\beta)$，使 $F(x,y)=0$

又 $F(x,y)$ 关于 y 严格单增，故 y 是唯一的

(2) 的证明：任取定 $\bar{x} \in (x_0-\alpha, x_0+\alpha)$，有 $\bar{y}=f(\bar{x}) \in (y_0-\beta, y_0+\beta)$

令 $\varepsilon_0 = \min\{y_0+\beta-\bar{y}, \bar{y}-(y_0-\beta)\}$，则 $0<\varepsilon<\varepsilon_0$，有

$y_0-\beta < \bar{y}-\varepsilon < \bar{y}+\varepsilon < y_0+\beta$ (3)，从而由 $F(\bar{x},y)$ 关于 y 严格单增，有 $F(\bar{x},\bar{y}-\varepsilon)<0$，$F(\bar{x},\bar{y}+\varepsilon)>0$

由函数 F 在 $(\bar{x},\bar{y}-\varepsilon)$ 与 $(\bar{x},\bar{y}+\varepsilon)$ 处连续

所以 $\exists \delta>0$，使 $(\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta) \subset (x_0-\alpha, x_0+\alpha)$，且 $\forall x \in (\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta)$ 有 $F(x,\bar{y}-\varepsilon)<0$ 且 $F(x,\bar{y}+\varepsilon)>0$

由一元函数的零点存在定理，$\exists y \in (\bar{y}-\varepsilon, \bar{y}+\varepsilon)$ 使 $F(x,y)=0$

所以由不等式 (3) 及已证明的 (1)，有 $y=f(x) \in (\bar{y}-\varepsilon, \bar{y}+\varepsilon)$

定理2：若在定理1的条件下，$F_x(x,y)$ 在 D 上连续，则还有

(3) $y=f(x)$ 在 $(x_0-\alpha, x_0+\alpha)$ 内连续可导 且 $f'(x) = -\dfrac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$ (*)

定理2：若在定理1的条件下，$F_x(x,y)$ 在D上连续，则还有

(3) $y=f(x)$ 在 $(x_0-\alpha, x_0+\alpha)$ 内连续可导 且 $f'(x)=-\dfrac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$ (*)

直观理由：$F(x,f(x))=0$

$F_x(x,f(x))+F_y(x,f(x))\cdot f'(x)=0$

实际只需证明上式即可得到前者

$f'(x)\to$ 回归定义 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

(*)式的证明：任取定 $x\in(x_0-\alpha, x_0+\alpha)$

取 $\Delta x\neq 0$ 充分小，使 $x+\Delta x\in(x_0-\alpha, x_0+\alpha)$

记 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$，记 $y=f(x)\Rightarrow F(x,y)=0$

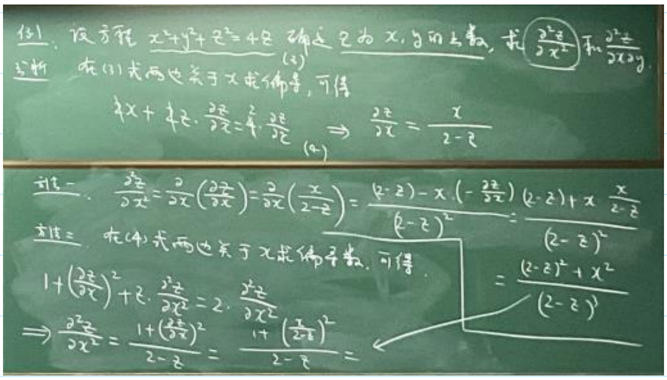
从而 $f(x+\Delta x)=y+\Delta y \Rightarrow F(x+\Delta x, y+\Delta y)=0$

$0=F(x+\Delta x, y+\Delta y)-F(x,y)$

$\overset{\text{中值定理}}{=} F_x(x+\theta\Delta x, y+\theta\Delta y)\cdot\Delta x+F_y(x+\theta\Delta x, y+\theta\Delta y)\cdot\Delta y$

$\Longrightarrow \dfrac{\Delta y}{\Delta x}=-\dfrac{F_x(x+\theta\Delta x, y+\theta\Delta y)}{F_y(x+\theta\Delta x, y+\theta\Delta y)}$

$=-\dfrac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$ ($\Delta x\to 0$ 且 $F_x\cdot F_y$ 连续)



$$\begin{cases} F_1(x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,\cdots y_m)=0 \\ \vdots \\ F_m(x_1,\cdots x_n,y_1\cdots y_m)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1=f_1(x_1,\cdots,x_n) \\ \vdots \\ y_m=f_m(x_1,\cdots,x_n) \end{cases}$$

要满足 $\dfrac{\partial(F_1,\cdots,F_m)}{\partial(y_1,\cdots y_m)}(P_0)\neq 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}(P_0)\neq 0$

设 $D\subset\mathbb{R}^{n+m}$ 是开集，$F_i: D\to\mathbb{R}$ 连续，$1\le i\le m$，$P_0(x_1^0,\cdots x_n^0, y_1^0,\cdots y_m^0)\in D$

设以下条件满足

(i) $F_i(P_0)=0 \quad 1\le i\le m$

(ii) F_i 在D内存在连续的偏导数 $F_{x_1},\cdots F_{x_n}, F_{y_1},\cdots F_{y_m}$

(iii) $\dfrac{\partial(F_1\cdots,F_m)}{\partial(y_1\cdots y_m)}(P_0)\neq 0$

则 $\exists\alpha,\beta>0$ 使 $O((x_1^0,x_2^0,\cdots x_n^0),\alpha)\times O((y_1^0,y_2^0,\cdots y_m^0),\beta)\subset D$ 且满足

(1) $\forall(x_1,\cdots,x_n)\in O((x_1^0,x_2^0,\cdots x_n^0),\alpha)$，$\exists!(y_1,\cdots y_m)\in O((y_1^0,y_2^0,\cdots y_m^0),\beta)$，使 $F_i(x_1,\cdots x_n,y_1\cdots y_m)=0$，$\forall 1\le i\le m$

将 y_i 记作 $f_i(x_1,\cdots x_n)$，则有 $y_i^0=f_i(x_1^0,\cdots x_m^0)$ $1\le i\le m$ 且

$F_i(x_1,\cdots,x_n,f_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots f_m(x_1,\cdots,x_n))=0$ $\forall x\in O((x_1^0,\cdots x_n^0),\alpha)$

(2) $f_i(x_1,\cdots,x_n)$ 在 $O((x_1^0,\cdots x_n^0),\alpha)$ 内连续 $\forall 1\le i\le m$

(3) $\forall 1\le i\le m$，$\forall x\in O((x_1^0,\cdots x_n^0),\alpha)$，$f_i$ 有连续偏导数

对 $F_i(x_1,\cdots x_n,y_1,\cdots y_m)=0$，$1\le i\le m$ 关于 x_j 求偏导

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}=-\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial F_i}{\partial y_k}\cdot\frac{\partial y_k}{\partial x_j}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial F_1}{\partial x_n}\\ \vdots&&\\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial F_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial y_1}&\cdots&\frac{\partial F_1}{\partial y_m}\\ \vdots&&\\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}&\cdots&\frac{\partial F_m}{\partial y_m}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial y_1}{\partial x_n}\\ \vdots&&\\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial y_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial y_1}{\partial x_n}\\ \vdots&&\\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial y_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial y_1}&\cdots&\frac{\partial F_1}{\partial y_m}\\ \vdots&&\\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}&\cdots&\frac{\partial F_m}{\partial y_m}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial F_1}{\partial x_n}\\ \vdots&&\\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial F_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}$$

特殊情形 $m=n=2$

$$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0 & (7)\\ G(x,y,u,v)=0 & (8)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u=u(x,y)\\ v=v(x,y)\end{cases}$$

(1) 在 $P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 处，$F(P_0)=G(P_0)=0$

(2) 在 P_0 附近，F与G的偏导数连续

(3) $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\neq 0$

可在 P_0 附近，解出隐函数 $\begin{cases}u=u(x,y)\\ v=v(x,y)\end{cases}$

问：$\frac{\partial u}{\partial x}$ $\frac{\partial u}{\partial y}$ $\frac{\partial v}{\partial x}$ $\frac{\partial v}{\partial y}$

在(7)、(8) 关于x求偏导　　Cramer 法则

$$\begin{cases}F_x+F_u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+F_v\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=0\\ G_x+G_u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+G_v\frac{\partial v}{\partial x}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}\Big/\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\\ \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}\Big/\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\end{cases}$$

逆映射定理（反函数组定理）

设 $D\subset\mathbb{R}^2$ 是开集

$f:D\to\mathbb{R}^2$ 的分量函数为 $\Big\{ x=x(u,v)$

设 $D\subset\mathbb{R}^2$ 是开集

$f: D\to\mathbb{R}^2$ 的分量函数为 $\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \end{cases}$

且它们在 $P_0(u_0,v_0)$ 附近有连续的一阶偏导数，并且 Jacobi 行列式 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\Big|_{P_0}\neq 0$

令 $x_0=x(u_0,v_0)$ $y_0=y(u_0,v_0)$，记 $Q_0(x_0,y_0)$

则在 Q_0 的某邻域 $O(Q_0,\alpha)$ 内 存在 f 的逆映射 g

$$\begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases} \quad (x,y)\in O(Q_0,\alpha)$$

满足 (1) $u_0=u(x_0,y_0)$，$v_0=v(x_0,y_0)$

(2) g 在 $O(Q_0,\alpha)$ 内有连续偏导数

12.5 偏导数的几何中的应用

2024年4月30日 星期二 12:13

空间曲线的切线与法平面

(1) $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]$

设 $t = t_0$ 处，$x(t), y(t), z(t)$ 均可导，且 $x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)$ 不全为 0

则曲线 l 在 $P_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ 处的切线方程为

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}$$

(2) 设曲线 l 由方程组 $\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$ 确定

确切地，设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 满足 $F(P_0) = G(P_0) = 0$

F, G 在 P_0 的某邻域内有连续的偏导数

且 $\begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{pmatrix}$ 在 P_0 处秩为 2

不妨设 $\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(P_0) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$ 在 P_0 附近

$$\begin{cases} -F_x = F_y \cdot \frac{dy}{dx} + F_z \cdot \frac{dz}{dx} \\ -G_x = G_y \cdot \frac{dy}{dx} + G_z \cdot \frac{dz}{dx} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}} \\ \frac{dz}{dx} = \dfrac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}} \end{cases}$$

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}}$$

曲线 l: $\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases} \quad P_0(x_0, y_0, z_0) \in l$

(要求：F与G的偏导数连续
且 $\begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{pmatrix}\Big|_{P_0}$ 秩为 2)

曲面 $F(x,y,z) = 0$ 在 P_0 处的法线的方向向量为

$\vec{n}_F = (F_x(P_0), F_y(P_0), F_z(P_0))$

类似的 $\vec{n}_G = (G_x(P_0), G_y(P_0), G_z(P_0))$

得曲线 l 在 P_0 处的切线的方向向量为

$$\vec{\tau} = \vec{n}_F \times \vec{n}_G = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}$$ (与上面的行列式相同)

曲面 S 在一点处的切平面方程与法线方程

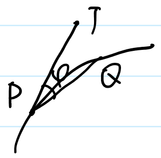
从切线的定义出发

$P \in l$，PT 为给定的直线，任取 $Q \in l$

若当 $Q \to P$ 时，有 PT 与 PQ 的夹角 $\varphi \to 0$，则称 PT 为 l 在 P 点的切线

$\varphi \to 0 \iff \sin\varphi \to 0$

$\iff \dfrac{d(Q,PT)}{|PQ|} \to 0$



PT为切线 $\iff \lim\limits_{\substack{Q\to P\\ Q\in \ell}} \dfrac{d(Q,PT)}{|PQ|} = 0$

$\Downarrow$

S是曲面，$P\in S$，T是过点P的一个平面，称T为S在P处的切平面

若 $\lim\limits_{\substack{Q\to P\\ Q\in \ell}} \dfrac{d(Q,T)}{|PQ|} = 0$

(特殊曲面) $S: z = f(x,y) \quad (x,y)\in D$ (D为开集)

取 $(x_0,y_0)\in D$，令 $z_0 = f(x_0,y_0)$，则 $P(x_0,y_0,z_0)\in S$

断言：若f在点(x_0,y_0)处可微 (P(*))，则曲线S在点P处存在切平面

分析：由命题P(*)成立，有

$f(x,y) - f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) + o(\rho)$

其中 $\rho = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$

将证明：平面 Π：$z - z_0 = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$

为S在点P的切平面.

相应的法线方程为 $\dfrac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)} = \dfrac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)} = \dfrac{z-z_0}{-1}$

$\forall Q(x,y,f(x,y))\in S$

$$d(Q,\Pi) = \frac{|f(x,y) - z_0 - f_x(x_0,y_0)(x-x_0) - f_y(x_0,y_0)(y-y_0)|}{\sqrt{1+f_x^2(x_0,y_0)+f_y^2(x_0,y_0)}}$$

$$\le |f(x,y) - z_0 - f_x(x_0,y_0)(x-x_0) - f_y(x_0,y_0)(y-y_0)|$$

$|PQ| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(f(x,y)-z_0)^2} \ge \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = \rho$

当 $Q\to P$ 且 $Q\in S$，有 $\rho\to 0$ 从而

$$\lim_{\substack{Q\to P\\ Q\in S}} \frac{d(Q,\Pi)}{|PQ|} = \lim_{\rho\to 0} \frac{d(Q,P)}{|PQ|} = 0$$

一般曲面S：$F(x,y,z)=0 \quad (x,y,z)\in \mathbb{D}$

设 $P_0(x_0,y_0,z_0)\in S$，即 $(x_0,y_0,z_0)\in D$ 且 $F(P_0)=0$

法一：设 F_x, F_y, F_z 在D内连续，且 $F_x(P_0), F_y(P_0), F_z(P_0)$ 不全为0

不妨设 $F_z(P_0)\ne 0$

则由隐函数定理，在P_0的附近，可由 $F(x,y,z)=0$ 唯一确定一个隐函数

$z = z(x,y) \quad (x,y)\in (x_0,y_0)$的某邻域

并且 $z=z(x,y)$ 在 $x_0,y_0)$处可微

由于在P_0附近，曲面 $F(x,y,z)=0$ 与曲面 $z=z(x,y)$重合，所以曲面S在

P_0处的切平面方程为：

$$z - z_0 = z_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + z_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

由隐函数定理 $z_x(x_0,y_0) = -\dfrac{F_x(P_0)}{F_z(P_0)}$，$z_y(x_0,y_0) = -\dfrac{F_y(P_0)}{F_z(P_0)}$

从而切平面方程 $F_x(P_0)(x-x_0) + F_y(P_0)(y-y_0) + F_z(P_0)(z-z_0) = 0$

法线方程为：$\dfrac{x-x_0}{F_x(P_0)} = \dfrac{y-y_0}{F_y(P_0)} = \dfrac{z-z_0}{F_z(P_0)}$

法二：在曲面S中任取一条光滑曲线

$$l:\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$$

且要求 $P_0\in l$，设 $x_0=x(t)$　$y_0=y(t)$　$z_0=z(t)$

由 $l\subset S$ 可得 $F(x(t),y(t),z(t))=0$

两边关于 t 求导，在 $t=t_0$ 处

$F_x(P_0)\cdot x'(t_0)+F_y(P_0)\cdot y'(t_0)+F_z(P_0)\cdot z'(t_0)=0$

注意到曲线 l 在 P_0 处的切线的方向向量 $(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))$

于是 $\vec{n}=(F_x(P_0),F_y(P_0),F_z(P_0))$

则 $\vec{n}$ 与 l 在 P_0 的切线的方向向量正交

由 l 的任意性，曲面S中任意过点P的光滑曲线的切线落在

如下同一平面：① 过点 P_0 ②且以 $\vec{n}$ 为法向量

即：$F_x(P_0)(x-x_0)+F_y(P_0)(y-y_0)+F_z(P_0)(z-z_0)=0$

设曲面S有如下的参数表示

$$\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \\ z=z(u,v) \end{cases},\quad (u,v)\in D$$

其中D为开长方形，设 $(u_0,v_0)\in D$

令 $x_0=x(u_0,v_0)$，$y_0=y(u_0,v_0)$，$z_0=z(u_0,v_0)$

记 P_0 为 (x_0,y_0,z_0)

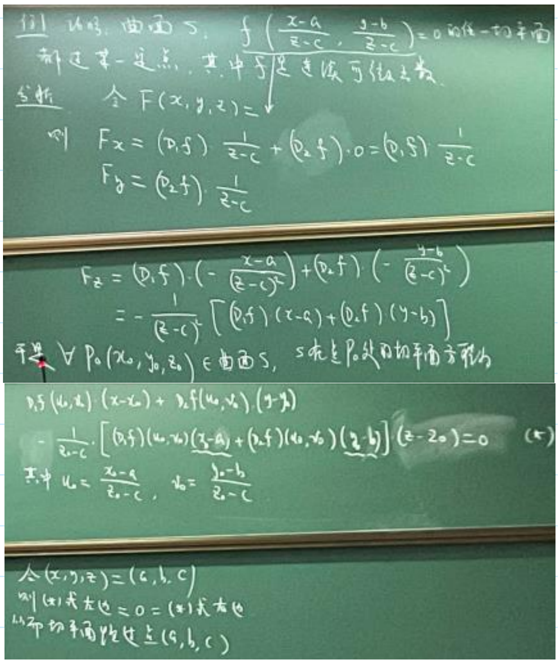
设 $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ 在D内有偏导数，且 $\left.\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}\right|_{P_0}$ (*) 的秩为2.

不妨设 $\left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{P_0}\neq 0$

法1：在 P_0 附近，由 $\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \end{cases}$ 解出 $\begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$

代入 $z=z(u,v)$ 得到 $z=z(u(x,y),\ldots)$，

求出 $z_x(x_0,y_0)$，$z_y(x_0,y_0)$ $\Rightarrow$ 切平面方程



法2：过 P_0 处的 u 线：$\begin{cases} x=x(u,v_0) \\ y=y(u,v_0) \\ z=z(u,v_0) \end{cases}$

u线在 P_0 处的切线的方向向量为 $\vec{r}_u=(x_u(u_0,v_0),y_u(u_0,v_0),z_u(u_0,v_0))$

类似地：v线在 P_0 处的切线的方向向量为 $\vec{r}_v=(x_v(u_0,v_0),y_v(u_0,v_0),z_v(u_0,v_0))$

由条件(*) $\vec{r}_u$ 与 $\vec{r}_v$ 不平行，

所以 $\vec{n}=\vec{r}_u\times\vec{r}_v$ 是切平面的法向量.

$$\text{由于 } \vec{r}_u\times\vec{r}_v=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}=\left.\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}\vec{i}+\left.\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}\vec{j}+\left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}\vec{k}$$

故切平面方程为

$$\left.\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}(x-x_0)+\left.\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}(y-y_0)+\left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}(z-z_0)=0$$

12.6 无条件极值

2024年4月25日 星期四　　13:27

无条件极值

定义：如果二元函数 f 在 (x_0,y_0) 的某个邻域 $U=O((x_0,y_0),r)$ 内有定义，且

$\forall (x,y)\in U$，有 $f(x,y)\underset{(\geq)}{\leq} f(x_0,y_0)$

则 (x_0,y_0) 称作 f 的极$\underset{(小)}{大}$值点，$f(x_0,y_0)$ 称作 f 的一个极$\underset{(小)}{大}$值

若 f 在点 (x_0,y_0) 取到极大值，则 $\varphi(x)=f(x,y_0)$ 在点 x_0 取到极大值

若此时有 $f_x(x_0,y_0)$ 存在，则 φ 在点 x_0 可导，由费马定理，有 $\varphi'(x_0)=0$

$\Leftrightarrow f_x(x_0,y_0)=0$.

极值必要条件

如果 (x_0,y_0) 是二元函数 $f(x,y)$ 的极值点，并且 $f_x(x_0,y_0)$ 与 $f_y(x_0,y_0)$ 都存在

则 $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$　(1)

定义：满足条件 (1) 的点 (x_0,y_0) 称作驻点或临界点或稳定点（要求：f 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有定义）

设 f 在点 (x_0,y_0) 的某邻域存在 2 阶的连续偏导数，并且 $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$

当 $(\Delta x,\Delta y)$ 充分小时

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=\frac{1}{2}\underbrace{\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0)}_{}\overset{(1)}{}+o(\Delta x^2+\Delta y^2)$$

$$\text{又 }(1)=\Delta x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)+2\Delta x\Delta y\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)+\Delta y^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)$$

$$=(\Delta x\ \ \Delta y)\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix}$$

令 $H_f(x_0,y_0)=$ ，称其为 f 在点 (x_0,y_0) 处的 Hesse 矩阵

令 $H_f(x_0, y_0) =$ ，称其为 f 在点 (x_0, y_0) 处的 Hesse 矩阵

断言：如果 H 正定，则 (x_0, y_0) 为 f 的极小值点

记 $Q(u,v) = (u,v) H \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ ，$(\Delta x, \Delta y) \in \mathbb{R}^2$

在单位圆周 $S = \{(x,y) : x^2+y^2=1\}$ 上，Q 恒大于 0

由于单位圆周是紧集，而 Q 在 S 上连续，所以 Q 在 S 上可取到 min. 记其为 $2q$

则 $q > 0$，从而 $\forall (\Delta x, \Delta y) \neq (0,0)$，有

$$Q(\Delta x, \Delta y) = (\Delta x^2 + \Delta y^2)\left(\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}, \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\right) H \begin{pmatrix} \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} \\ \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} \end{pmatrix} \geq 2q(\Delta x^2 + \Delta y^2)$$

从而 $f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) \geq (q + o(1))(\Delta x^2 + \Delta y^2)$

于是当 $(\Delta x, \Delta y)$ 充分小时，有 $f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) > 0$

性质：假设二元函数 f 在 (x_0, y_0) 处的某邻域内存在连续的二阶偏导数，

且 $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ ，则 (为驻点)

(1) 如果 H 正定，则 (x_0, y_0) 是 f 的极小值点，

(2) --- 负 ---- --- 大 ---

(3) --- 不定 ---- 不是 ... ..

理由：如果 (x_0, y_0) 是 f 的极小值点，则 H 是半正定的

$\forall (\Delta x, \Delta y) \neq (0,0)$ 定义

$\varphi(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)$ ，$t \in 0$ 点的某个邻域

则 0 点 φ 的极小值点，且 φ 在 0 点的某个邻域存在二阶导数

从而有 $\varphi'(0) = 0 \quad \varphi''(0) \geq 0$

又 $\varphi'(t) = f_x(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y) \cdot \Delta x + f_y(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y) \cdot \Delta y$

$\varphi''(t) = \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)$

$\varphi''(0) = (\Delta x \ \Delta y) H \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow H$ 半正定

$H = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ 　　H 正定 $\Leftrightarrow A > 0$ 且 $AC - B^2 > 0$

H 负定 $\Leftrightarrow A < 0$ 且 $AC - B^2 > 0$

$$H=\begin{pmatrix}A & B\\ B & C\end{pmatrix}$$

H 正定 $\Longleftrightarrow$ $A>0$ 且 $AC-B^2>0$

H 负定 $\Longleftrightarrow$ $A<0$ 且 $AC-B^2>0$

H不定 $\Longleftrightarrow$ $AC-B^2<0$

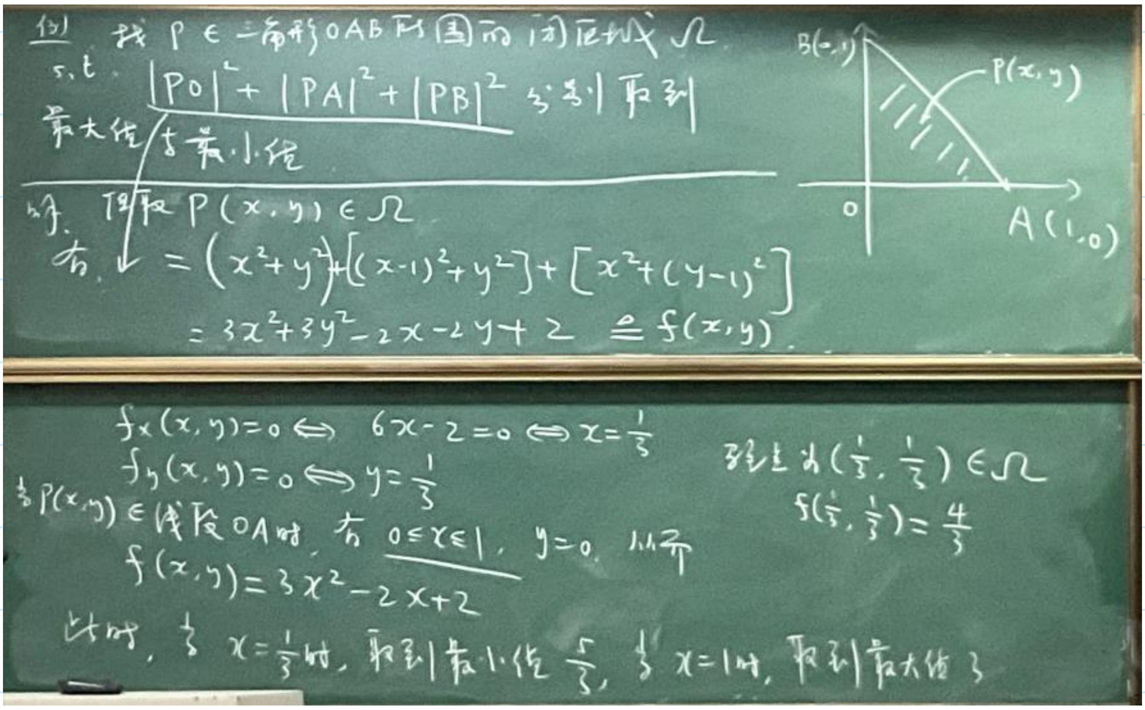
注：当 $AC-B^2=0$，(x_0,y_0) 可能是 f 的极值点，也可能不是 f 的极值点，

例：$f(x,y)=x^n+y^n$ $\begin{cases} n\geq 4 & \text{偶} & \checkmark\ \text{极小} \\ n\geq 3 & \text{奇} & \times\ \text{极小}\end{cases}$

$(x_0,y_0)=(0,0)$

有界闭区域D上的最值（$f: D\subset\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ 连续）

最大(小)值 $\begin{cases} \text{区域内部取到（极值点）} \begin{cases} f_x\text{与}f_y\text{在极值点处存在} \longrightarrow \text{看Hesse矩阵} \\ \quad\text{(驻点)} \\ f_x\text{与}f_y\text{至少有一个在极值点处不存在} \end{cases} \\ \text{区域边界上取到} \end{cases}$



当 $P(x,y)\in$ 线段 OB 时. - - - -

当 $P(x,y)\in$ 线段 AB 时，有 $y=1-x$，$0\le x\le 1$

从而 $f(x,y)=3x^2+3(1-x)^2-2\cancel{(x+y)+2}$

$=6x^2-6x+3$

此时当 $x=\frac{1}{2}$ 时取到最小值 $\frac{3}{2}$，在 $x=1$ 和 $x=0$ 处取到最大值 3

综上，f 在 $(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ 处取到 Ω 上的最小值 $\frac{4}{3}$.

f 在 $(0,1)$ 与 $(1,0)$ 取到 Ω 上的最大值 3.

$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\frac{1}{3},\frac{1}{3})=6$, $C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\frac{1}{3},\frac{1}{3})=6$

$B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\frac{1}{3},\frac{1}{3})=0$

$A>0$ 且 $AC-B^2>0$. $(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ 是 f 的极小值点

12.7 条件极值

2024年5月7日 星期二 11:42

原点到l的最短距离就是如下函数

$f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

在限制条件 $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=2 \end{cases}$ 之下的最小值问题

$z=f(x,y)$ $(x,y)\in D$

限制条件 $\varphi(x,y)=0$

$(x_0,y_0)\in D^0$ 且 $\varphi(x_0,y_0)=0$

称f在限制条件之下的条件极大值点，如果

$\exists\,(x_0,y_0)$的某个邻域U，使$\forall\,(x,y)\in U$，只要$\varphi(x,y)=0$

就有 $f(x_0,y_0)\geq f(x,y)$

假设 φ_x,φ_y 在D内连续，并且$\varphi_x(x_0,y_0)$，$\varphi_y(x_0,y_0)$不全为0，不妨设

$\varphi_y(x_0,y_0)\neq 0$，记P_0为(x_0,y_0)，由隐函数定理，在(x_0,y_0)附近，

可由$\varphi(x,y)=0$唯一确定隐函数 $y=g(x)$，$x\in x_0$的某邻域

注意到此时x_0是$z=h(x)=f(x,g(x))$的极大值点.（前提：设(x_0,y_0)为条件极大值点）

理由：任取x_0的某个小邻域中的一点x，令$y=g(x)$，则$\varphi(x,y)=0$ 并且

(x,y)在U内，从而 $f(x,y)\leq f(x_0,y_0)$

即 $h(x)\leq h(x_0)$

又 $h(x)$ 在 x_0 处可导，所以

$$0=h'(x_0)=f_x(P_0)+f_y(P_0)\cdot g'(x_0)$$

$$=f_x(P_0)-f_y(P_0)\cdot\frac{\varphi_x(P_0)}{\varphi_y(P_0)}$$

情形1：设 $\varphi_x(P_0)\neq 0$，则

$$\frac{f_x(P_0)}{\varphi_x(P_0)}=\frac{f_y(P_0)}{\varphi_y(P_0)}\overset{\text{记作}}{=\!=}-\lambda_0$$

$$\begin{cases} f_x(P_0)+\lambda_0\varphi_x(P_0)=0 & (1) \\ f_y(P_0)+\lambda_0\varphi_y(P_0)=0 & (2) \\ \varphi(x_0,y_0)=0 & (3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 \\ y_0 \\ \lambda_0 \end{cases}$$

情形2：$\varphi_x(P_0)=0 \Rightarrow f_x(P_0)=0$

此时令 $\lambda_0=-\dfrac{f_y(P_0)}{\varphi_y(P_0)}$，则有 (2) 式成立！

显然此时 (1)，(3) 成立！

总结：只要 (x_0,y_0) 为条件极值点，就可找到 λ_0，使 (1)(2)(3) 成立

Lagrange 函数　　lagrange 乘子/乘数

令 $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$

则 (x_0,y_0,λ_0) 满足

$$\begin{cases} 0=L_x(x_0,y_0,\lambda_0) \\ 0=L_y(x_0,y_0,\lambda_0) \\ 0=L_z(x_0,y_0,\lambda_0) \end{cases}$$

<u>条件极值的必要条件</u>　设在限制条件

$\varphi_k(x_1,x_2,\cdots x_n)=0$，$k=1,2,3,\cdots,m$ $(m<n)$

求目标函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的极值，其中 $\varphi_k(k=1,2,\cdots,m)$ 及

f 在开集 D 内有连续的偏导数

设 $J=\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\ \partial\varphi_m & \cdots & \partial\varphi_m \end{pmatrix}$ 在D内的秩为m

设 $J=\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ 在D内的秩为 m

若 $P_0(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$ 为条件极值点，则 $\exists \lambda_1^0, \cdots \lambda_m^0$ 使

$(x_1^0, \cdots x_n^0, \lambda_1^0, \cdots, \lambda_m^0)$ 是以下拉格朗日函数的驻点，

$$L(x_1^0, \cdots x_n^0, \lambda_1^0, \cdots \lambda_m^0) = f(x_1, x_2, \cdots x_n) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \varphi_k(x_1, \cdots, x_n)$$

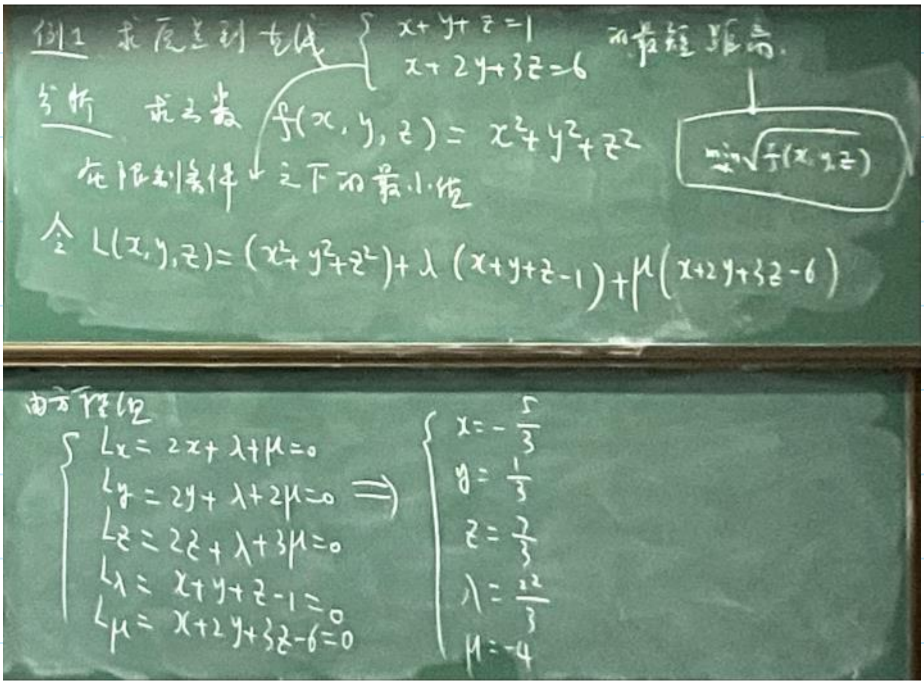
即：
$$\begin{cases} L_{x_1} = f_{x_1} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k (\varphi_k)_{x_1} = 0 \\ \vdots \\ L_{x_n} = f_{x_n} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k (\varphi_k)_{x_n} = 0 \\ L_{\lambda_1} = \varphi_1 = 0 \\ \vdots \\ L_{\lambda_m} = \varphi_m = 0 \end{cases} \quad (1)$$

条件极值的充分条件

设 $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0, \lambda_1^0, \cdots \lambda_m^0)$ 是方程组 (1) 的解，且 $\varphi_k (k=1, \cdots, m)$ 与 f 在开集D内有连续的二阶偏导数，则当矩阵

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j} (x_1^0, \cdots x_n^0, \lambda_1^0, \cdots \lambda_m^0) \right)_{n \times n} .$$

是正定的（或负定），则 $P_0(x_1^0, \cdots, x_n^0)$ 是条件极小值（大）点



由于点到直线的距离，即这个问题的最小值必定存在，
因此这个唯一的可能极值点 $\left(-\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)$ 必是最小值点，
从而所求距离为

$$\sqrt{f\left(-\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)} = \frac{5}{\sqrt{3}}.$$